



٢٠٢١

ملزمة

الجبر والإحصاء

الصف الثالث الإعدادي

الترم الأول



تساوى زوجين مرتبين

- **الزوج المرتب:** (أ ، ب) يسمى زوج مرتب

يسمى أ : المسقط الأول أو الإحداثي السيني

يسمى ب : المسقط الثاني أو الإحداثي الصادي

◆ (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) فمثلا (٢ ، ٥) ≠ (٥ ، ٢)

◆ (١ ، ٣) يسمى زوج مرتب بينما {١ ، ٣} تسمى مجموعة

■ إذا تساوى زوجين مرتبين فإن :

المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

فمثلا : إذا كان (س ، ص) = (٥ ، ٣) فإن: س = ٥ ، ص = ٣

أيضا : إذا كان (س – ٢ ، ١٠) = (٧ ، ص+٢)

فإن س – ٢ = ٧ ⟵ س = ٩ ، ص+٢ = ١٠ ⟵ ص = ٨

مثال ١

إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص+٣)

فأوجد قيمة $\sqrt{\text{س+٢ص}}$

الحل

س – ١ = ٨ ∴ س = ٩

ص + ٣ = ١١ ∴ ص = ٨

∴ $\sqrt{\text{س+٢ص}} = \sqrt{٩ + ٢ \times ٨}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

مثال 2

إذا كانت ($\text{س}^٥$ ، ص +١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{س}^٥ = ٣٢$ ∴ $\text{س}^٥ = ٢^٥$

∴ س = ٢

ص + ١ = $\sqrt[٣]{٢٧}$ ∴ ص + ١ = ٣

∴ ص = ٢

تدريب

إذا كانت: (أ + ٥ ، ٣) = (٨ ، ب – ١)

فإن أ = ... ، ب = ...



حاصل الضرب الديكارتي

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين س ، ص

- حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين س ، ص يكتب س × ص ويقرأ س ضرب ص
- س × ص : هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ينتمي للمجموعة س ومسقطها الثانى ينتمى للمجموعة ص.

أي أن: س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

- فمثلا: إذا كانت س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦}

فإن : س × ص = {١ ، ٣} × {٢ ، ٤ ، ٦}

= { (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }

بينما ص × س = {٢ ، ٤ ، ٦} × {١ ، ٣}

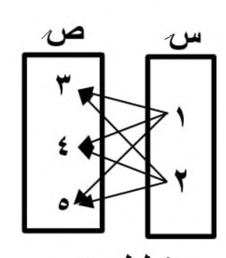
= { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٣) }

- لاحظ أن : س × ص ≠ ص × س
- يمكن تمثيل س × ص كمخطط سهمى ومخطط بيانى كما في المثال التالى.

مثال إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

فأوجد س × ص ومثله بمخطط سهمى وآخر بياني

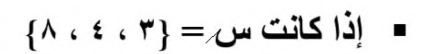
الحل : س × ص = { (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) }



مخطط سهمى

ص
٥
٤
٣
س
١
٢

مخطط بيانى



حاصل الضرب الديكارتي س × س أو س²

- إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ٨}

فإن : س × س أو س² = {٣ ، ٤ ، ٨} × {٣ ، ٤ ، ٨}

= { (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٨) ، (٤،٣) ، (٤،٤) ، (٤،٨) ، (٨،٣) ، (٨،٤) ، (٨،٨) }



عدد العناصر: يرمز له بالرمز ن

- إذا كانت س = {٢ ، ٥} فإن عدد عناصر س = ٢ وتكتب ن (س) = ٢
- إذا كانت ص = {٤} فإن ن (ص) = ١ وليس ٤

القاعدة: ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)

فمثلا: إذا كانت ن (س) = ٤ ، ن (ص) = ٥ فإن ن (س × ص) = ٤ × ٥ = ٢٠

أيضا: إذا كانت س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦} فإن ن (س × ص) = ٢ × ٣ = ٦

العمليات على المجموعات

إذا كانت س = {٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥} فإن:

- التقاطع ∩ : س ∩ ص = { ٣ } ← خد المكرر
- الاتحاد ∪ : س ∪ ص = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ← خد الكل ، والمكرر مرة واحدة
- الفرق ـ : س ـ ص = { ٢ } ← خد الموجود في س ومش موجود في ص

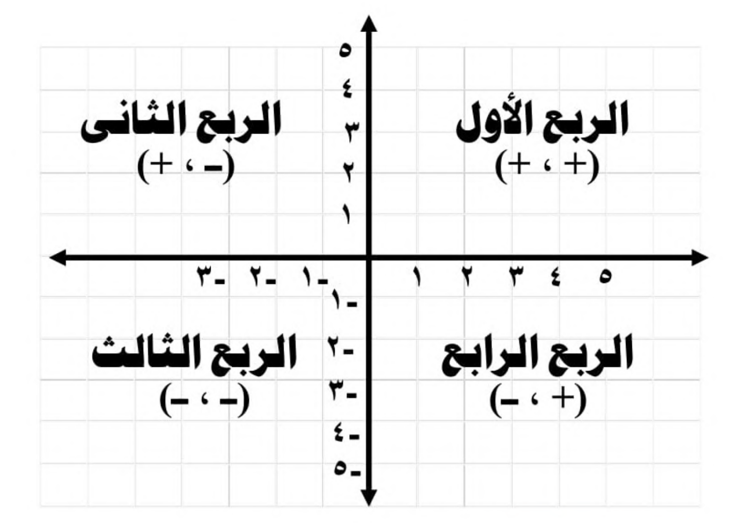
  ص ـ س = {٤ ، ٥} ← خد الموجود في ص ومش موجود في س

الشبكة التربيعية المتعامدة

- تنقسم الشبعة التربيعية إلى ٤ أرباع ومحور سينات ومحور صادات
- يمكن التعرف على الربع الذي تقع فيه أي نقطة من إشارتى إحداثييها كما بالشكل.
- إذا كان الإحداثى السينى = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات مثل (٠ ، ٣)
- إذا كان الإحداثى الصادي = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات مثل (٢ ، ٠)

مثال

- النقطة (٥ ، ٢) تقع في الربع الأول
- النقطة (-٢ ، ٣) تقع في الربع الثاني
- النقطة (-٣ ، -٤) تقع في الربع الثالث
- النقطة (١ ، -٣) تقع في الربع الرابع
- النقطة (٠ ، ٢) تقع على محور الصادات
- النقطة (٤ ، ٠) تقع على محور السينات
- النقطة (٠ ، ٠) تسمى نقطة الأصل "و"



تدريب

- النقطة (٣ ، -٢) تقع ....
- النقطة (-٥ ، ٦) تقع ....
- النقطة (-٤ ، -٧) تقع ....
- النقطة (٠ ، -٢) تقع ....
- النقطة (٥ ، ٠) تقع ....
- النقطة (٣ ، ٤) تقع ....

١ إذا كانت س × ص = { (٢،٢) ، (٢،٥) ، (٢،٧) }

أوجد : ١) ص ٢) ص × س

٣) ن (ص^2)

الحل

- ص = { ٢، ٥ ، ٧ }
- ص × س = { (٢،٢)، (٥،٢)، (٧،٢) }
- ن (ص^2) = ٣ × ٣ = ٩

٢ إذا كانت س = {٣،٤} ، ص = { ٤،٥ }

، ع = { ٦،٥ } فأوجد :

١) س × (ص∩ع) ٢) (س ـ ص) × ع

الحل

التجهيز: (ص ∩ ع) = { ٥ } ، س ـ ص = { ٣ }

- س × (ص∩ع) = {٣،٤} × { ٥ }
= { (٣،٥)، (٤،٥) }
- (س ـ ص) × ع = { ٣ } × { ٦،٥ }
= { (٣،٦)، (٣،٥) }

٣ إذا كانت س = {٢،٥} ، ص = { ١،٢ }

، ع = { ٣ } فأوجد :

١) ن (س × ع) ٢) (ص ∩ س) × ع

الحل

١ ن (س×ع) = ن (س) × ن (ع) = ٢×١ = ٢

٢ التجهيز: (ص ∩ س) = { ٢ }

(ص ∩ س) × ع = { ٢ } × { ٣ } = { (٢،٣) }

٤ إذا كانت س = {١،٥،٦} ، ص = { ٢،٤،٥ }

فأوجد : ١) ص × س ومثله بمخطط سهمى

٢) ن (س × ص)

الحل

١ ص × س = { (٢،١)، (٢،٥)، (٢،٦) ، (٤،١) ، (٤،٥) ، (٤،٦) ، (٥،١) ، (٥،٥) ، (٥،٦) }

مثل المخطط بنفسك

٢ ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) = ٣×٣ = ٩

٥ إذا كانت س = {٢،٣} ص = { ٣،٤،٥ }

فأوجد : ١) س × ص

٢) (س × ص) ∩ ص^2

الحل

١ س × ص = { (٢،٣)، (٢،٤)، (٢،٥) ، (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٥) }

٢ ص^2 = { (٣،٣)، (٣،٤)، (٣،٥) ، (٤،٣) ، (٤،٤) ، (٤،٥)، (٥،٣)، (٥،٤) ، (٥،٥) }

(س × ص) ∩ ص^2 = { (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٥) }

٦ إذا كانت س = {٢،-١} ص = { ٤،٠ }

، ع = { ٤،٥،-٢ } فأوجد :

فأوجد : ١) س × ص ٢) س ^{2}

٣) ن (س × ع) ٤) ن (ع^2) ٥) ن(ص^2)

الحل

١ س × ص = { (٢،٤)، (٢،٠)، (-١،٤) ، (-١،٠) }

٢ س^2 = { (٢،٢)، (٢،-١)، (-١،٢) ، (-١،-١) }

٣ ن (س × ع) = ن (س) × ن (ع) = ٢ × ٣ = ٦

٤ ن (ع^2) = ن (ع) × ن (ع) = ٣ × ٣ = ٩

٥ ن (ص^2) = ن (ص) × ن (ص) = ٢ × ٢ = ٤



العلاقة ع

- العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي س × ص.
- يتم اختيار أزواج **بيان العلاقة** من أزواج الضرب الديكارتي حسب **شرط** معين يعطى لك في المسألة
- **المقصود بجملة أ ع ب** : أي علاقة أ ، ب حيث أ هى المسقط الأول ، ب هي المسقط الثانى في الأزواج المرتبة
- إذا كانت العلاقة من س إلى ص : فإن المسقط الأول ∈ س ، المسقط الثانى ب ∈ ص

مثال ١ إذا كانت س = { ١، ٣ ، ٤ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٥

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

إعمل س × ص في دماغك واختار منها الأزواج اللى ينطبق عليها الشرط أ + ب = ٥ يعنى المسقط الأول + المسقط الثانى = ٥

بيان ع = { (١،٤)، (٣،٢)، (٤،١) }

س	ص
١	١
٣	٢
٤	٣
	٤
	٥

تدريب إذا كانت س = { ٢، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ = $\frac{١}{٢}$ ب

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

الحل

اختر الأزواج اللى فيها المسقط الأول نصف الثانى

بيان ع =

متي تكون العلاقة دالة ؟!

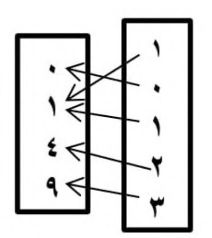
- يمكن أن تكون العلاقة دالة ويمكن أن تكون ليست دالة، فكل دالة هي علاقة وليست كل علاقة دالة.
- يقال لعلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص أنها دالة إذا تحقق الآتى:
  - ❖ **إذا ظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول مرة واحدة فقط** (في بيان ع)
  - ❖ **أو إذا خرج من كل عنصر من عناصر س سهم واحد فقط** (في المخطط السهمى)
- إذا كانت العلاقة دالة فإن الدالة لها مدى: ومدى الدالة هو عناصر المسقط الثانى في بيان العلاقة
- إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مدى

١

إذا كانت س = { -١، ٠، ١، ٢، ٣}،
ص = {٠، ١، ٤، ٦، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى أن " أ^{٢} = ب "
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

الحل

بيان ع = { (-١،١)، (٠،٠)، (١،١)، (٢،٤)، (٣،٩) }



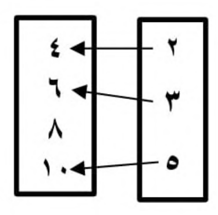
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
أو لأن كل عنصر من س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط .
- المدى = { ٠، ١، ٤، ٩ }

٢

إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ،
ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " ٢أ = ب "
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

الحل

بيان ع= { (٢،٤)، (٣،٦)، (٥،١٠) }



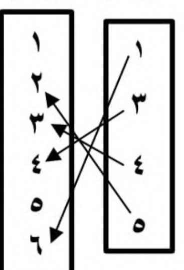
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ٤ ، ٦ ، ١٠ }

٣

إذا كانت س = { ١، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٧
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

الحل

بيان ع= { (١،٦)، (٣،٤)، (٤،٣)، (٥،٢) }

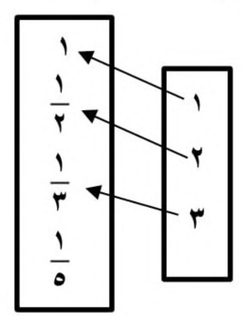


- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ٢، ٣ ، ٤ ، ٦ }

٤

إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = { ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ هو المعكوس الضربى للعدد ب
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

بيان ع= { (١،١)، (٢ ، $\frac{١}{٢}$)، (٣ ، $\frac{١}{٣}$) }



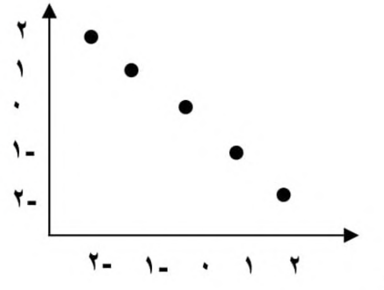
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ }

٥

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }
وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ معكوس جمعى للعدد ب
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بيانى هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها

الحل

بيان ع = { (-٢،٢)، (-١،١)، (٠،٠)، (١،-١)، (٢،-٢) }



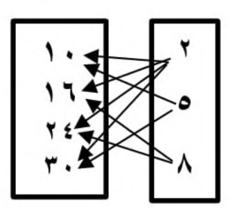
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س ظهر في بيان ع كمسقط أول مرة واحدة فقط .
- المدى = { ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ }

٦

إذا كانت س = { ٢، ٥ ، ٨ } ،
ص = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " أ عامل من عوامل ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.هل ع دالة؟ ولماذا؟

الحل

بيان ع = { (٢،١٠)، (٢،١٦)، (٢،٢٤)، (٢،٣٠)، (٥،١٠)، (٥،٣٠)، (٨،١٦)، (٨،٢٤) }



- ع ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من س خرج منه أكثر من سهم.
- لاحظ هنا أنه لا يوجد مدى لأن العلاقة ليست دالة.

٧

إذا كانت س = { ١، ٣ ، ٥ } ،
وكانت ع علاقة معرفة على س
وكان بيان ع = { (أ ، ٣)، (ب ، ١)، (١ ، ٥) }
١) أوجد مدى الدالة
٢) أوجد القيمة العددية للمقدار أ + ب

الحل

مدى الدالة هو الأرقام الموجودة في المسقط الثانى

المدى = { ٣ ، ١ ، ٥ }

العلاقة دالة يبقى لازم كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط ..
العنصر ١ ظهر يبقى أ ، ب هما ٣ ، ٥

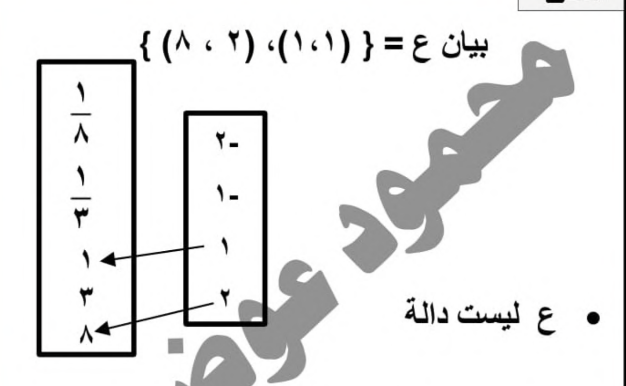
أ + ب = ٣ + ٥ = ٨

٨

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ١ ، ٢ }،
ص = { $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " $أ^{٣}$ = ب "
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟

الحل

بيان ع = { (١،١)، (٢ ، ٨) }



- ع ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من س لم يخرج منه أسهم.

إعداد أ/ محمود عوض



الدالة

- يرمز للدالة بالرمز د أو ر أو ق
- إذا كانت د دالة من س إلى ص فإنها تكتب د : س ⟵ ص ويكون :

❖ **المجال**: هو عناصر المجموعة س

❖ **المجال المقابل**: هو عناصر المجموعة ص

❖ **المدى**: هو مجموعة صور عناصر المجال (وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل)

- قاعدة الدالة: تكون مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س + ١ ، د(س) = س^{٢} +٢س – ٣ وهكذا
- لاحظ أن : د(س) هي نفسها ص أي أن : د(س)= ص

مثال ١

إذا كانت د: س⟵ص ، س = { ٣، ٥ ، ٧} ، ص = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }
، بيان د = { (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) ، (٧ ، ٢١) }

فأوجد : ١- مجال الدالة ٢- المجال المقابل
٣- مدى الدالة ٤- قاعدة الدالة

الحل

١- مجال الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

٢- المجال المقابل = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }

٣- مدى الدالة = { ٩ ، ١٥ ، ٢١ }

٤- قاعدة الدالة هي : د (س) = ٣س

مثال ٢

إذا كان بيان الدالة د = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١) }

فأوجد : ١- مجال ومدى الدالة
٢- قاعدة الدالة

◆ مجال الدالة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

◆ مدى الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

◆ قاعدة الدالة هي : د(س) = ٢س + ١

ملاحظات على التعويض في الدالة

- عند التعويض عن عدد سالب في س^{٢} نضع العدد بين قوسن فمثلا إذا كانت س = -٣ فإن س^{٢} = (-٣)^{٢} = ٩
- يمكن التعويض في قاعدة الدالة عن قيمة س أو قيمة ص أو كلاهما **ويمكن الاستعانة بالآتى:**

١ إذا كان (٢ ، ٥) ينتمى لبيان الدالة: فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٢ ، د(س) أو ص = ٥

٢ إذا كان د (٣) = ٧ فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٣ ، د(س) أو ص = ٧

مسائل على التعويض فى الدالة

١ إذا كانت د(س) = ٤س + ب وكان د(٣) = ١٥

أوجد قيمة ب

الحل

د(٣) = ١٥ معناها انك لما تعوض في الدالة عن س = ٣ الناتج هيساوى ١٥

٤ × ٣ + ب = ١٥

١٢ + ب = ١٥ ∴ ب = ٣

٢ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٤س ـ ٥

فأوجد قيمة أ

الحل

من الزوج (أ ، ٣) نأخذ س = أ ، د (س) = ٣

بالتعويض في الدالة

∴ ٣ = ٤ أ ـ ٥

٤ أ = ٣ + ٥ ⟸ ٤ أ = ٨

∴ أ = ٢

٣ إذا كانت د (س) = $س^٢$ ـ ٣س ، ر (س) = س ـ ٣

فأوجد د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$)

الحل

د ($\sqrt{٢}$) = $(\sqrt{٢})^٢$ ـ ٣ $\sqrt{٢}$ = ٢ ـ ٣ $\sqrt{٢}$

ر ($\sqrt{٢}$) = $\sqrt{٢}$ ـ ٣

٣ ر($\sqrt{٢}$) = ٣ $\sqrt{٢}$ ـ ٩

د($\sqrt{٢}$)+٣ر ($\sqrt{٢}$)= ٢ ـ٣ $\sqrt{٢}$ + ٣ $\sqrt{٢}$ ـ٩= ـ ٧

٤ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٦س ـ أ يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمتى أ ، ب

الحل

المستقيم يقطع محور الصادات ب = ٠

من الزوج (ب ، ٣) نعوض عن س = ٠ ، ص =٣

٣ = ٦ × ٠ ـ أ ⟸ ٣ = ٠ ـ أ

ـ أ = ٣ ⟸ أ = ٣

٥ إذا كانت س = { ٠، ١، ٣ } ، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧ }

وكانت د : س ← ص حيث د (س) = ٥ ـ س

فأوجد صور عناصر س بالدالة د .

الحل

لإيجاد صور عناصر س نعوض في الدالة عن قيم س

د (٠) = ٥ ـ ٠ = ٥

د(١) = ٥ ـ ١ = ٤

د (٣) = ٥ ـ ٣ = ٢

∴ صور عناصر س (هي المدى) = { ٥ ، ٤ ، ٢ }

٦ إذا كانت س = { ٢، ٣، ٤ } ، ص ={٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ }

وكانت د : س ← ص حيث د (س) = ٩ ـ س

فأوجد بيان الدالة د ثم أوجد المدى .

الحل

نعوض في الدالة د(س) = ٩ ـ س عن قيم المجموعة س

د (٢) = ٩ ـ ٢ = ٧

د(٣) = ٩ ـ ٣ = ٦

د (٤) = ٩ ـ ٤ = ٥

بيان د = { (٢، ٧) ، (٣، ٦) ، (٤، ٥) }

المدى = { ٧ ، ٦ ، ٥ }

إعداد أ/ محمود عوض

دوال كثيرات الحدود

◆ الدالة كثيرة الحدود هي دالة تتكون من حد أو أكثر ويجب توافر شرطان لتكون كثيرة حدود وهما:

١ كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو ح

٢ أسس المتغير س ∈ ط ، أي لا يوجد بالدالة كثيرة الحدود جذر أو مجهول في المقام أو أس سالب

◆ أمثلة لدوال كثيرات حدود:

مثل: د(س) = ٢س +١ ، د(س)= $س^٢$ + ٣س – ٢ ، د(س) = $س^٣$ – ٨

◆ أمثلة لدوال ليست كثيرات حدود :

مثل: د(س)= $س^٢$ + $\sqrt{س}$ +٨ ، د(س) = س (س + $\frac{١}{س}$ +٢)

درجة الدالة

هي درجة أكبر أس في الدالة (بعد التبسيط)

- الدالة د: د(س) = $س^٤$ + ٢$س^٣$ + ٥ دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة
- الدالة د: د(س) = $س^٢$ + ٢س - ١ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (تسمى دالة تربيعية)
- الدالة د: د(س) = س + ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى (تسمى دالة خطية)
- الدالة د: د(س) = ٧ دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (تسمى دالة ثابتة)

مثال١: الدالة د: د(س) = $س^٢$ (س +٢) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

الحل: نبسط الدالة فتكون : د(س) = $س^٣$ + ٢س ∴ د دالة من الدرجة الثالثة

مثال٢: الدالة د: د(س) = $س^٢$ – ($س^٢$ – ٣س +١) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

الحل: نبسط الدالة فتكون : د(س) = $س^٢$ – $س^٢$ + ٣س – ١ = ٣س +١ ∴ د دالة من الدرجة الأولى

مثال ١

إذا كان د(س) = $س^٢$ – س +٣

فأوجد : د(-٢) ، د(٠) ، د($\sqrt{٣}$)

الحل

عوض ثم استعن بالآلة الحاسبة

د (-٢) = $(-٢)^٢$ – -٢ + ٣ =١١

د (٠) = $٠^٢$ – ٠ + ٣ = ٣

د ($\sqrt{٣}$) = ($\sqrt{٣}$ $)^٢$ – $\sqrt{٣}$ +٣

= ٩ – $\sqrt{٣}$ +٣ = ١٢ – $\sqrt{٣}$

مثال ٢

إذا كانت د(س) = ٢$س^٢$ – ٥س + ٢

١) اذكر درجة الدالة د

٢) اثبت أن د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

الحل

- الدالة د من الدرجة الثانية
- د (٢) = ٢ × $٢^٢$ – ٥ × ٢ + ٢ = صفر

د ($\frac{١}{٢}$) = ٢ × $(\frac{١}{٢})^٢$ – ٥× $\frac{١}{٢}$ + ٢ = صفر

∴ د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

الدالة الخطية

إعداد أ/ محمود عوض

◆ الدالة الخطية هي دالة من الدرجة **الأولى**

مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س – ١ ، د(س) = ٥س +٣

◆ تكون على الصورة د(س) = أ س + ب حيث أ ≠ ٠ وتمثل بيانيا بخط مستقيم بحيث يكون:

- نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ب)
- نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

فمثلا: إذا كانت د: د(س) = ٢س – ٥ فإن أ = ٢ ، ب = –٥ ومنها فإن :

- نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، –٥)
- نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي ($\frac{٥}{٢}$ ، ٠)

◆ وبطريقة أخرى يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات بالتعويض عن س = ٠
و نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات بالتعويض عن ص = ٠

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور السينات ⟸ نفهم أن المسقط الثانى ص = صفر

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور الصادات ⟸ نفهم أن المسقط الأول س = صفر

مثال

مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣ س – ١
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

الحل

في الدالة الخطية نفرض أى ٣ قيم للـ س

س	٣س – ١	ص
٠	٣ × ٠ – ١	-١
١	٣ × ١ – ١	٢
٢	٣ × ٢ – ١	٥

من قاعدة الدالة: أ = ٣ ، ب = –١

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) هى ($\frac{١}{٣}$ ، ٠)

، نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ب) هى (٠ ، -١)

تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د: د(س) = ٢ س – ٣

وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

الحـل

س	٢س – ٣	ص

الدالة الثابتة

❖ الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ب ، ب ∈ ح تسمى دالة ثابتة وهى من الدرجة الصفرية

مثل: د (س) = ٧ ، د (س) = ٥ ، د (س) = ٢ وهكذا

❖ إذا كانت د (س) = ٥ فإن د (١) = ٥ ، د (٥) = ٥ ، د (-٥) = ٥ ، د (٠) = ٥ وهكذا

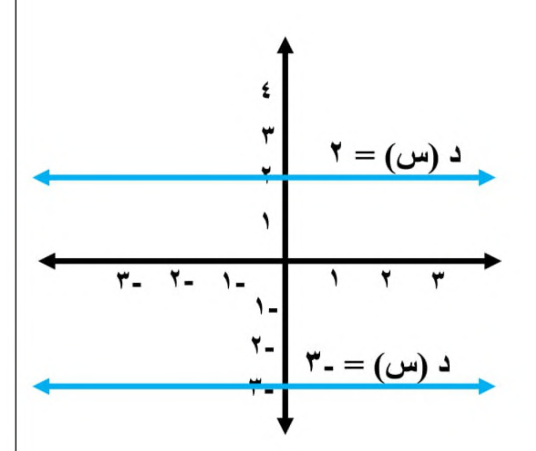
فمثلا: إذا كانت د (س) = ٧ فإن د(٣) + د (-٣) = ٧ + ٧ = ١٤

❖ الدالة الثابتة تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور السينات

◆ مثال١: مثل بيانيا الدالة د (س) = ٢

◆ مثال٢: مثل بيانيا الدالة د (س) = -٣





إعداد أ/ محمود عوض

الدالة التربيعية

❖ الدالة التربيعية هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

❖ الدالة د: ح ⟵ ح حيث د(س) = أ $س^2$ + ب س + جـ تسمى دالة تربيعية

مثل: د(س) = $س^2$ ، د(س) = ـ $س^2$ ، د(س) = $س^2$ ـ ٥ ، د(س) = $س^2$ ـ ٢ س +١

ملاحظات هامة

١ إذا كان معامل $س^2$ موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى وله قيمة صغرى

٢ إذا كان معامل $س^2$ سالب فإن المنحنى يكون مفتوح لأسفل وله قيمة عظمى

٣ رأس المنحنى: تحدد من الرسم أو من قاعدة الدالة د(س) = أ $س^2$ + ب س + جـ بالقانون:

نقطة رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \right)$

٤ من نقطة رأس المنحنى نأخذ:

- قيمة س هي معادلة محور التماثل
- قيمة ص هي القيمة العظمى أو الصغرى

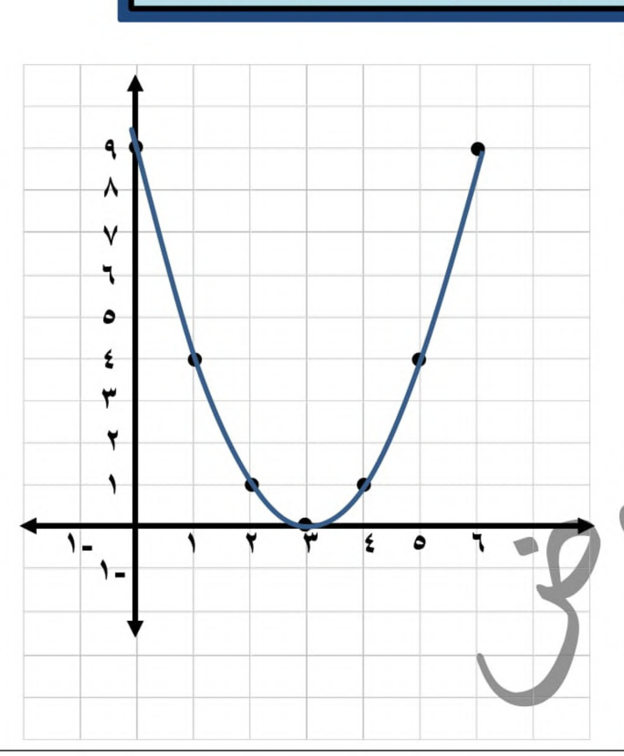
مثال ١ مثل بيانيا الدالة د(س) = (س ـ ٣)^2 متخذاً س ∋ [٠ ، ٦]

ومن الرسم استنتج :

١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	(س ـ ٣)^2	ص
٠	(٠ ـ ٣)^2	٩
١	(١ ـ ٣)^2	٤
٢	(٢ ـ ٣)^2	١
٣	(٣ ـ ٣)^2	٠
٤	(٤ ـ ٣)^2	١
٥	(٥ ـ ٣)^2	٤
٦	(٦ ـ ٣)^2	٩



رأس المنحنى = (٣ ، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٣

القيمة الصغرى = ٠

إعداد / محمود عوض حسن

مثال ٢

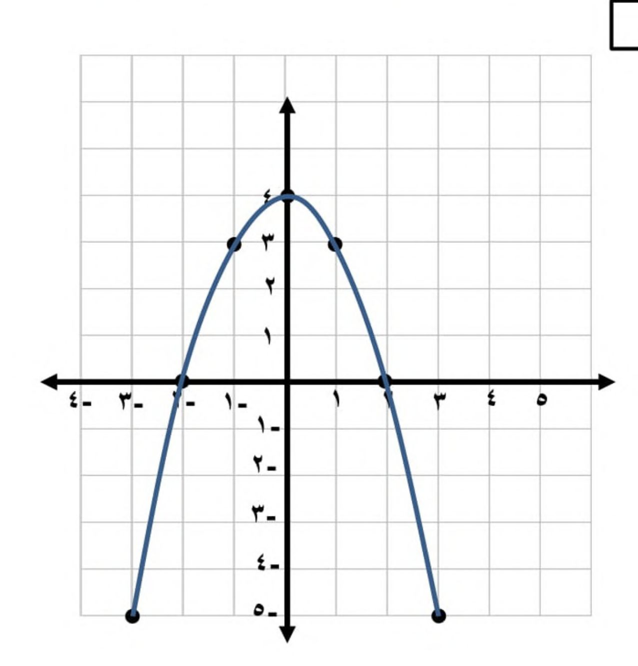
مثل بيانيا الدالة د(س) = ٤ – س^٢ متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	٤ – س^٢	ص
-٣	٤ – (-٣)^٢	-٥
-٢	٤ – (-٢)^٢	٠
-١	٤ – (-١)^٢	٣
٠	٤ – (٠)^٢	٤
١	٤ – (١)^٢	٣
٢	٤ – (٢)^٢	٠
٣	٤ – (٣)^٢	-٥



رأس المنحنى = (٠ ، ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى = ٤

مثال ٣

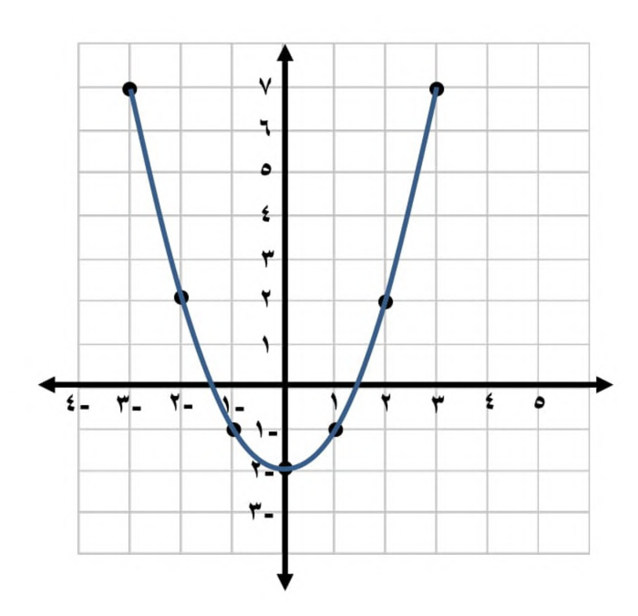
مثل بيانيا الدالة د(س) = س^٢ – ٢ متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	س^٢ – ٢	ص
-٣	(-٣)^٢ – ٢	٧
-٢	(-٢)^٢ – ٢	٢
-١	(-١)^٢ – ٢	-١
٠	(٠)^٢ – ٢	-٢
١	(١)^٢ – ٢	-١
٢	(٢)^٢ – ٢	٢
٣	(٣)^٢ – ٢	٧



رأس المنحنى = (٠ ، -٢)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة الصغرى = -٢

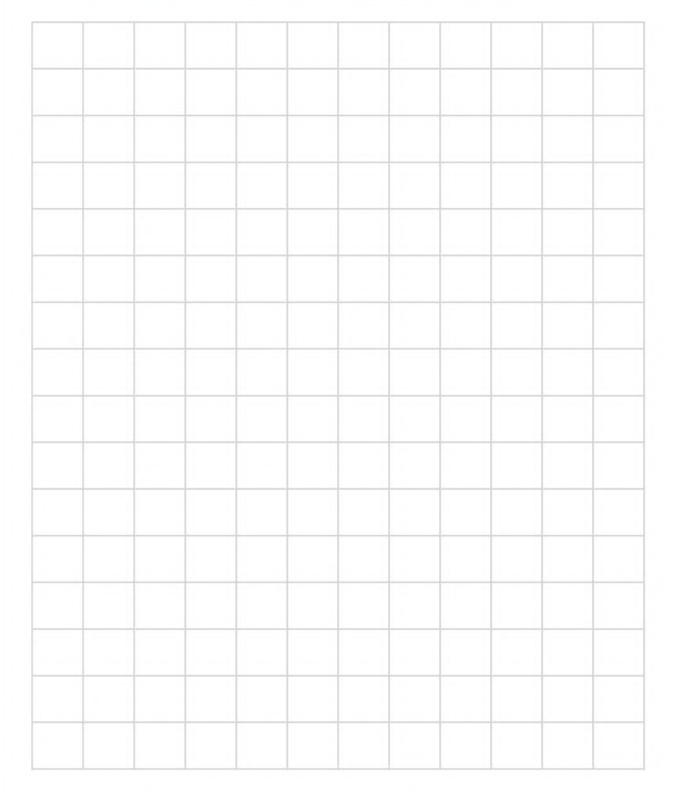
تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د(س) = س^{٢} + ٢س + ١ متخذًا س ∈ [-٤ ، ٢]

ومن الرسم استنتج :

١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

س	س^{٢} + ٢س +١	ص



رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

محمود عوض

معلم أول رياضيات

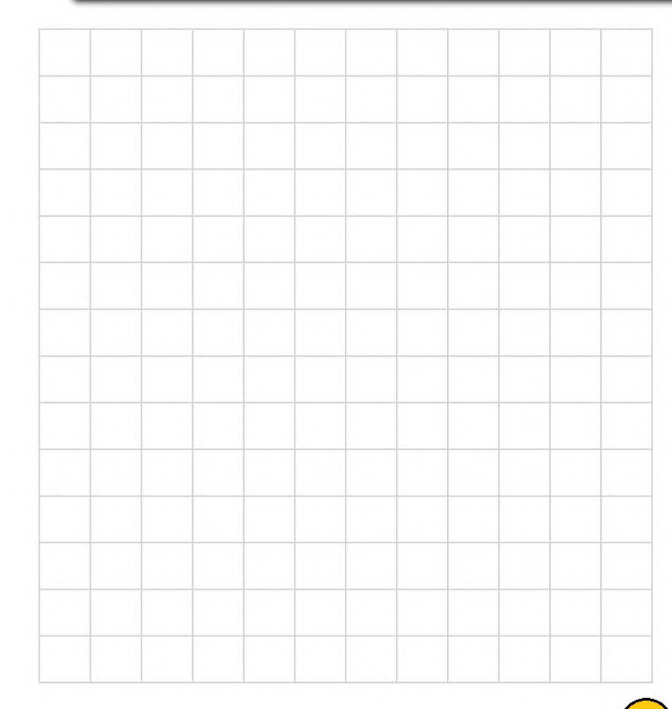
تدريب ٢

مثل بيانيا الدالة د: د(س) = ــ س^{٢} متخذًا س ∈ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل ٣)القيمة الصغرى أو العظمى

س	ـ س^{٢}	ص
-٣	ـ (-٣)^{٢}	-٩



رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

أسئلة اختر على الوحدة الأولى

١ إذا كان (٢ ، س – ١) = (ص ، ٠) فإن س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -٣

٢ إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص+٣) فإن $\sqrt{\text{س+٢ص}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٢٥

٣ إذا كان (٣ ، ٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨} فإن س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٣

٤ النقطة (-٣ ، ٤) تقع فى الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (جـ) الثالث (د) الرابع

٥ إذا كانت س = { ٢ } ، ص = { ٣ } فإن س × ص = ...

(أ) ٦ (ب) { ٣ } (جـ) (٢ ، ٣) (د) { (٢ ، ٣) }

٦ إذا كان ن (س) = ٣ ، ن (س × ص) = ١٢ فإن ن (ص) = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ٣٦

٧ إذا كان ن (س) = ٢ ، ن (ص × س) = ٦ فإن ن (ص^{٢}) = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٦ (د) ١٢

٨ إذا كانت ن (س^{٢}) = ٩ فإن ن (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٩ إذا كانت النقطة (س -٤ ، ٢- س) تقع فى الربع الثالث فإن س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

١٠ إذا كانت النقطة (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

١١ إذا كانت د(س) = ٧ فإن د (-٣) = ...

(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) ٢١ (د) -٢١

١٢ الدالة د : د(س) = ٣ س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....

(أ) (٠ ، -٣) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٣)

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

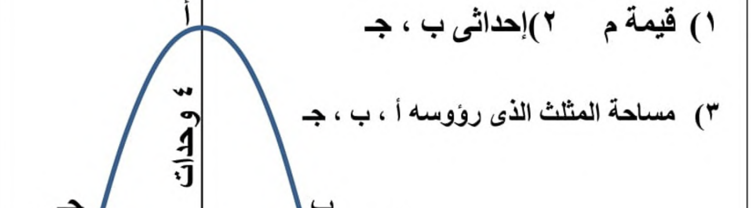
متفوقين

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = م – س^{٢} فإذا كان أ و = ٤ وحدات فأوجد:

١) قيمة م ٢) إحداثى ب ، جـ

٣) مساحة المثلث الذى رؤوسه أ ، ب ، جـ



الحل

- المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤) بالتعويض في الدالة
  ∴ ٤ = م – ٠^{٢} ∴ م = ٤
- إحداثى ب هو (س ، ٠) بالتعويض في الدالة
  ∴ ٠ = ٤ – س^{٢} ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢
  ∴ إحداثى ب (٢ ، ٠) ، إحداثى جـ (–٢ ، ٠)
- مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع
  = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨ وحدات مربعة

واجب على الوحدة الأولى

إعداد أ/ محمود عوض

حاصل الضرب الديكارتى

١) إذا كانت (س ـ ١ ، ٢٩) = (٤ ، ص٣ + ١)
فأوجد قيمة س + ٢ ص

٢) إذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٥ }
، ع = { ٤ ، ٥ } فأوجد:
١) (س ـ ص) × ع ٢) ن (ع٢)

٣) إذا كانت س × ص = { (٢،٦) ، (٢،٩) ، (٣،٦)
، (٣،٩) ، (٥،٦) ، (٥،٩) } فأوجد:
١) س ، ص ٢) ص × س ٣) ن (س٢)

العلاقة

١) إذا كانت س = {١،٢،٤،٥} ، ص = {١،٤،١٦}
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى:
أ٢ = ب لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص
١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى
٢) هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟

٢) إذا كانت س = {١،٢،٣،٤}
، ص = {ص:ص ∋ ط ، ٢ ≤ ص < ٩ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى:
(أ = $\frac{١}{٢}$ ب) لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص
١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى
٢) بيّن أن ع دالة وأوجد مداها؟

٣) إذا كانت س = {١،٢،٣} ، ص = {١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$}
وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى أن أ ب = ١ لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بيّن أن ع دالة واكتب مداها

الدالة

١) إذا كان بيان الدالة د = {(١،٣) ، (٢،٥) ، (٣،٧)
، (٤،٩) ، (٥،١١)}
١) اكتب مجال ومدى الدالة د ٢) اكتب قاعدة الدالة

٢) إذا كانت د (س) = س٢ ـ ٣س ،
ر (س) = س ـ ٣
١) أوجد د(٢) + ر(٢)
٢) اثبت أن د (٣) + ر (٣) = صفر

٣) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٥س + ٤
يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب)
فأوجد قيمة ب

٤) إذا كانت د (س) = ٣س + ب ، د (٤) = ١٣
فأوجد قيمة ب

٥) إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: ح ← ح
حيث د (س) = ٢س + أ ، د (٣) = ٩
١) أوجد قيمة أ
٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السينى

التمثيل البيانى لدوال كثيرات الحدود

١) مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢س + ١ ثم أوجد نقط
تقاطع المستقيم الممثل للدالة مع محورى الإحداثيات

٢) ارسم منحنى الدالة د: د (س) = س٢ + ١
متخذا س ∋ [ـ٢ ، ٢] ومن الرسم عين:
١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل
٣)القيمة الصغرى أو العظمى

٣) مثل بيانيا منحنى الدالة د (س) = ٣ ـ س٢
حيث س ∋ [ـ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد:
١) معادلة محور التماثل
٢) القيمة العظمى أو الصغرى

اختبار على الوحدة الأولى

إعداد أ/ محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت النقطة (٣ ، ب – ٥) تقع على محور السينات فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

٢ إذا كان { ٢ } × { أ ، ب } = { (٢،٤) ، (٢،٣) } فإن أ ـ ب = ...

(أ) ١ (ب) ـ١ (جـ) ±١ (د) صفر

٣ الدالة د حيث د (س) = ٥س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....

(أ) (٠،٥) (ب) (٥،٥) (جـ) (٥،٠) (د) (٠،٠)

٤ إذا كانت ص = { صفر } فإن ن (ص^{٢}) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

السؤال الثانى:

أ) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أ = $\frac{١}{٣}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى وبين أن ع دالة واكتب مداها.

ب) مثل بيانيا الدالة الخطية د: ح ⟵ ح حيث د (س) = س + ٢

وأوجد نقط تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

السؤال الثالث:

أ) إذا كان (٢س ، ٤) = (٨ ، ص + ١) فأوجد قيمة $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

ب) إذا كان س × ص = { (١،٢) ، (١،٣) ، (٢،٢) ، (٢،٣) }

فأوجد: ١) س ∪ ص ٢) ص^{٢}

السؤال الرابع:

أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ـ٥)

فأوجد : ١) د ($\frac{٢}{٣}$) ٢) قيمة أ

ب) مثل بيانيا الدالة د حيث د (س) = س^{٢} ـ ١ حيث س ∈ [ـ٢ ، ٢] ومن الرسم استنتج:

١) معادلة محور التماثل ٢) القيمة الصغرى للدالة

◆ النسبة هي مقارنة بين كميتين من نفس النوع، النسبة بين أ ، ب تكتب أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

يسمى أ : مقدم النسبة ، ب: تالى النسبة ، أ ، ب معا: حدى النسبة

◆ النسبة لا تتغير إذا ضرب حديها في عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

فمثلا: $\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٦}{١٠}$

◆ النسبة تتغير إذا أضيف أو طرح من حديها عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

فمثلا: $\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣ + ٢}{٥ + ٢} \neq \frac{٥}{٧}$ تغيرت النسبة

◆ إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٤ فإننا نفرض أن العددان هما ٣م ، ٤م

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طرح منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ ، أوجد العددين؟

الحل

نفرض أن العددان هما ٣م ، ٧م

$\therefore \frac{٣م - ٥}{٧م - ٥} = \frac{١}{٣}$ (مقص)

٩م – ١٥ = ٧م – ٥

٩م – ٧م = -٥ + ١٥

٢م = ١٠ م = ٥

∴ العدد الأول = ٣م = ٣×٥ = ١٥

∴ العدد الثانى = ٧م = ٧×٥ = ٣٥

٢ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد = س

$\frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

٣س + ٢١ = ٢س + ٢٢

٣س – ٢س = ٢٢ – ٢١

∴ س = ١ ∴ العدد هو ١

٣ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ مربعه = $س^٢$

$\frac{س^٢+٥}{س^٢+١١} = \frac{٣}{٥}$ (مقص)

$٥س^٢ + ٢٥ = ٣س^٢ + ٣٣$

$٥س^٢ - ٣س^٢ = ٣٣ - ٢٥$

$٢س^٢ = ٨$ $س^٢ = ٤$

س = $\pm$ ٢ ∴ العدد الموجب هو ٢

٤ أوجد العدد الموجب الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ ثلاثة أمثاله = ٣س

$\frac{٤٩ - ٣س}{٦٩ - ٣س} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

٣(٤٩ – ٣س) = ٢ (٦٩ – ٣س)

١٤٧ – ٩س = ١٣٨ – ٦س

– ٩س + ٦س = ١٣٨ – ١٤٧

– ٣س = – ٩ ∴ س = ٣

إعداد أ/ محمود عوض



التناسب

◆ التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

فمثلا : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ يسمى تناسب والكميات أ ، ب ، جـ ، د تسمى **كميات متناسبة**

◆ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ حيث:

أ : الأول المتناسب ، ب : الثانى المتناسب ، جـ : الثالث المتناسب ، د : الرابع المتناسب

أ ، د : الطرفين ، ب ، جـ : الوسطين

خواص التناسب

خاصية ١ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أي أنه إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن : أ × د = ب × جـ

وغالبا ما تستخدم عند وجود مجهول واحد في التناسب مثل : $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{٦}$ أو $\frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{س - ٢}{س + ٣}$

مثال ١

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦

الحـل

نفرض أن الرابع المتناسب هو س

الكميات هي: ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س

∴ $\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٤ × س = ١٢ × ١٦

س = $\frac{١٢ \times ١٦}{٤}$ = ٤٨

∴ الرابع المتناسب هو ٤٨

تدريب

أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢ ، ٤ ، ٦

مثال ٢

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

الحـل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ٥} = \frac{\text{س} + ٨}{\text{س} + ١٢}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ١٢\text{س} + ٣٦ = \text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٨\text{س} + ٤٠$

$١٥\text{س} + ٣٦ = ١٣\text{س} + ٤٠$

$١٥\text{س} - ١٣\text{س} = ٤٠ - ٣٦$

$٢\text{س} = ٤$ ← $\text{س} = ٢$ ∴ العدد هو ٢

تدريب

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٢ ، ٤ ، ١٢ ، ١٨ فإنها تكون متناسبة

خاصية ٢

إذا كان أ جـ = ب د فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{د}}{\text{جـ}}$ في كل طرف ثبت حاجة وانقل التانية

- مثال ١: إذا كان ٥ أ = ٧ ب فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٧}{٥}$ ، $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٧}$
- مثال ٢: إذا كان ٢س – ٣ص = ٠ فإن ٢س = ٣ص ومنها $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٢}{٣}$
- تدريب: إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

خاصية ٣

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ $\frac{\text{مقدم}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{تالى}}{\text{تالى}}$

- مثال ١: إذا كانت أ ، ٢ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٩}$ ومنها $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢}{٩}$
- مثال ٢: إذا كان: ٥أ ، ٢س ، ٣ب ، ٧س كميات متناسبة فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} =$ ....

الحل : $\frac{٥\text{أ}}{٢\text{س}} = \frac{٣\text{ب}}{٧\text{س}}$ ← $\frac{٥\text{أ}}{٣\text{ب}} = \frac{٢\text{س}}{٧\text{س}}$ ∴ $\frac{٥\text{أ}}{٣\text{ب}} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢ \times ٣}{٧ \times ٥} = \frac{٦}{٣٥}$

- تدريب: إذا كان: أ ، ٢ص ، ب ، ٣ص كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

خاصية ٤

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ = جـ م ، ب = د م

◆ أي أن : إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ = م ومنها أ = جـ م ، ب = د م

يمكن أيضا استنتاج أن : أ = ب م ، جـ = د م ولو استخدمت أي استنتاج منهم صح

◆ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن : أ = ٣ م ، ب = ٥ م ومن الخطأ أن تقول أ = ٣ ، ب = ٥ وتنسى الثابت

◆ إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فإن : س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٥ م



ملاحظات

١ للتسهيل هتلغى خطوة العامل المشترك في حالتين:

- إذا كانت الحدود **مضروبة** : مثل جـ م × جـ فقط اضرب فتكون $جـ^2 م$
- إذا كانت الحدود **متشابهة** : مثل ١٢م + ١٠م فقط اجمع فتكون ٢٢م

٢ عند التعويض: إذا كان أ = ب م فإن $أ^2 = ب^2 م^2$ (ربع ب ، م)

٣ لإثبات أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة نثبت أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ (استخدم المقص في البداية)

٤ لو هتختصر حاجة في البسط مع حاجة في المقام لازم الاتنين يكونوا مضروبين وغير مرتبطين بجمع أو طرح

مثال ١ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{٣ أ - ٢ جـ}}{\text{٥ أ + ٣ جـ}} = \frac{\text{٣ ب - ٢ د}}{\text{٥ ب + ٣ د}}$

الحـل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ أ = جـ م ، ب = د م

الأيمن $= \frac{\text{٣ أ - ٢ جـ}}{\text{٥ أ + ٣ جـ}} = \frac{\text{٣جـ م - ٢جـ}}{\text{٥جـ م + ٣جـ}}$

$= \frac{\text{جـ (٣م - ٢)}}{\text{جـ (٥م + ٣)}} = \frac{\text{٣م - ٢}}{\text{٥م + ٣}}$

الأيسر $= \frac{\text{٣ ب - ٢ د}}{\text{٥ ب + ٣ د}} = \frac{\text{٣د م - ٢د}}{\text{٥د م + ٣د}}$

$= \frac{\text{د (٣م - ٢)}}{\text{د (٥م + ٣)}} = \frac{\text{٣م - ٢}}{\text{٥م + ٣}}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \left(\frac{\text{أ - جـ}}{\text{ب - د}}\right)^{\text{٢}}$

الحـل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

أ = جـ م ، ب = د م

الأيمن $= \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جـ م × جـ}}{\text{د م × د}} = \frac{\text{جـ}^{\text{٢}}\text{ م}}{\text{د}^{\text{٢}}\text{ م}} = \frac{\text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{د}^{\text{٢}}}$

الأيسر $= \left(\frac{\text{أ - جـ}}{\text{ب - د}}\right)^{\text{٢}} = \left(\frac{\text{جـ م - جـ}}{\text{د م - د}}\right)^{\text{٢}}$

$= \left(\frac{\text{جـ (م - ١)}}{\text{د (م - ١)}}\right)^{\text{٢}} = \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right)^{\text{٢}} = \frac{\text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{د}^{\text{٢}}}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣ إذا كانت $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$

فاثبت أن : $\frac{\text{٢ص - ع}}{\text{٣س - ٢ص + ع}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

الحـل

س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

الأيمن $= \frac{\text{٢ص - ع}}{\text{٣س - ٢ص + ع}}$

$= \frac{\text{٢×٤م - ٥م}}{\text{٣×٣م - ٢×٤م + ٥م}}$

$= \frac{\text{٨م - ٥م}}{\text{٩م - ٨م + ٥م}} = \frac{\text{٣م}}{\text{٦م}} = \frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ = الأيسر

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤ إذا كانت $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ فاثبت أن:

$\sqrt{\text{٣س}^{\text{٢}}\text{ + ٣ص}^{\text{٢}}\text{ + ع}^{\text{٢}}} = \text{٢س + ص}$

الحـل

س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

الأيمن $= \sqrt{\text{٣س}^{\text{٢}}\text{ + ٣ص}^{\text{٢}}\text{ + ع}^{\text{٢}}}$

$= \sqrt{\text{٣ × ٩م}^{\text{٢}}\text{ + ٣ × ١٦م}^{\text{٢}}\text{ + ٥ م}^{\text{٢}}}$

$= \sqrt{\text{٢٧ م}^{\text{٢}}\text{ + ٤٨ م}^{\text{٢}}\text{ + ٢٥ م}^{\text{٢}}}$

$= \sqrt{\text{١٠٠ م}^{\text{٢}}} = \text{١٠ م}$

الأيسر = ٢س + ص = ٢ × ٣م + ٤م

= ٦م + ٤م = ١٠ م

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{جـ}{د - جـ}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م$

أ = جـ م ، ب = د م

الطرف الأيمن = $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{جـ م}{د م - جـ م}$

$= \frac{جـ م}{م (د - جـ)} = \frac{جـ}{د - جـ}$ = الأيسر

مثال ٦

إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة:

$\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$

الحل

س = ٢م ، ص = ٣م

$\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س} = \frac{٣ \times ٢م + ٢ \times ٣م}{٦ \times ٣م - ٢م}$

$= \frac{٦م + ٦م}{١٨م - ٢م}$

$= \frac{١٢م}{١٦م} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٧

إذا كان $\frac{أ^٢ - ٢جـ^٢}{ب^٢ - ٢د^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$

فاثبت أن: أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$ب^٢ (أ^٢ - ٢جـ^٢) = أ^٢ (ب^٢ - ٢د^٢)$

$أ^٢ ب^٢ - ٢ب^٢ جـ^٢ = أ^٢ ب^٢ - ٢أ^٢ د^٢$

$- ٢ب^٢ جـ^٢ = - ٢أ^٢ د^٢$ (÷ -٢)

$ب^٢ جـ^٢ = أ^٢ د^٢$ ثبت وانقل

∴ $\frac{أ^٢}{ب^٢} = \frac{جـ^٢}{د^٢}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ، ب، جـ، د كميات متناسبة

مثال ٨

إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣

وكان أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ

أ = ٥م ، ب = ٧م ، جـ = ٣م

بالتعويض فى أ + ب = ٢٧,٦

∴ ٥م + ٧م = ٢٧,٦

١٢م = ٢٧,٦

∴ م = ٢,٣

∴ أ = ٥م = ٥ × ٢,٣ = ١١,٥

ب = ٧×٢,٣ = ١٦,١

جـ = ٣م = ٣ × ٢,٣ = ٦,٩

خاصية ٥

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = ...$ فإن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} =$ إحدى النسب

- إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ فإنه يمكن ضرب أي نسبة في أي عدد ثم جمع المقدمات وجمع التوالى

فمثلا: يمكن ضرب النسبة الأولى × ٢ والنسبة الثانية × ـ١ وضرب النسبة الثالثة × ٣ ثم بالجمع

فيكون : $\frac{\text{٢ أ ـ جـ + ٣ هـ}}{\text{٢ ب ـ د + ٣ و}} =$ إحدى النسب

- عايز تعرف هتضرب ازاى وفى كام؟ بص على بسط ومقام المطلوب إثباه في المسألة وانت هتعرف
- ما تيجوا نشوف !

مثال ٩

إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢أ + ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب ـ جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢جـ ـ أ}}$

فاثبت أن : $\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب ـ جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$

الحـل

عايزين نوصل للبسط اللى في الاثبات:

بضرب حدى النسبة الأولى × ٢ والجمع مع الثانية

$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٢ب + ٢ب ـ جـ}} =$ إحدى النسب

$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب ـ جـ}} =$ إحدى النسب ← (١)

للحصول على البسط الثانى نضرب النسبة الأولى × ٢ والنسبة الثانية × ٢ وجمع النسب الثلاثة

$\frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٤أ + ٢ب + ٤ب ـ ٢جـ + ٢جـ ـ أ}}$

$\frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}} =$ إحدى النسب ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن:

$\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب ـ جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$

مثال ١٠

إذا كان $\frac{\text{أ + ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{ب + جـ}}{\text{٦}} = \frac{\text{جـ + أ}}{\text{٥}}$

فاثبت أن : $\frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{أ}} = ٧$

الحـل

للوصول للبسط المطلوب: نجمع : النسبة الأولى + الثانية + الثالثة

$\frac{\text{أ + ب + ب + جـ + جـ + أ}}{\text{٣ + ٦ + ٥}} = \frac{\text{٢أ + ٢ب + ٢جـ}}{\text{١٤}}$

$= \frac{\text{٢(أ + ب + جـ)}}{\text{١٤}}$

$= \frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{٧}} =$ إحدى النسب ← (١)

للحصول على المقام: نجمع النسبتين اللى فيهم أ ــ النسبة الثانية

$\frac{\text{أ + ب + جـ + أ - ب - جـ}}{\text{٣ + ٥ ـ ٦}}$

$= \frac{\text{٢أ}}{\text{٢}} =$ أ = إحدى النسب ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

$\frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{٧}} =$ أ $\therefore \frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{أ}} = ٧$

مسألة مهمة

إذا كانت $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢أ - ب + ٥جـ}}{\text{٣س}}$ فأوجد قيمة س

التناسب المتسلسل

◆ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن:
أ : الأول المتناسب ، ب : الوسط المتناسب ، جـ : الثالث المتناسب

◆ الوسط المتناسب بين عددين = $\pm\sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$
مثال: الوسط المتناسب بين ٢ ، ١٨ = $\pm\sqrt{٢ \times ١٨} = \pm\sqrt{٣٦} = \pm٦$

❖ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$
ومنها ب = جـ م ، أ = جـ $م^٢$

❖ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$
ومنها جـ = د م ، ب = د $م^٢$ ، أ = د $م^٣$

ملاحظات هامة

١ التناسب المتسلسل يختلف عن التناسب العادى في خطوتين: تكوين التناسب وإيجاد القيم

٢ في التناسب المتسلسل نحسب قيم المقدمات بدلالة آخر تالى

٣ عند التعويض: إذا كان أ = ب م فإن $أ^٢ = ب^٢ م^٢$ (حط التربيع على ب ، م)
و إذا كان ب = د $م^٢$ فإن $ب^٢ = د^٢ م^٤$
و إذا كان أ = د $م^٣$ فإن $أ^٢ = د^٢ م^٦$

مثال ١

إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ
فاثبت أن: $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

∴ ب = جـ م ، أ = جـ $م^٢$

الأيمن = $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{جـ^٢ م^٤ + جـ^٢ م^٢}{جـ^٢ م^٢ + جـ^٢}$

$= \frac{جـ^٢ م^٢ (م^٢ + ١)}{جـ^٢ (م^٢ + ١)} = م^٢$

الأيسر = $\frac{أ}{جـ} = \frac{جـ م^٢}{جـ} = م^٢$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل
فاثبت أن: $\frac{جـ^٢ - د^٢}{أ - جـ} = \frac{ب د}{أ}$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

∴ جـ = د م ، ب = د $م^٢$ ، أ = د $م^٣$

الأيمن = $\frac{جـ^٢ - د^٢}{أ - جـ} = \frac{د^٢ م^٢ - د^٢}{د م^٣ - د م}$

$= \frac{د^٢ (م^٢ - ١)}{د م (م^٢ - ١)} = \frac{د}{م}$

الأيسر = $\frac{ب د}{أ} = \frac{د م^٢ \times د}{د م^٣} = \frac{د}{م}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $$\frac{أ^{2} - ٣جـ^{2}}{ب^{2} - ٣د^{2}} = \frac{ب}{د}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$$

جـ = د م ، ب = د م² ، أ = د م³

$$\text{الأيمن} = \frac{أ^{2} - ٣جـ^{2}}{ب^{2} - ٣د^{2}} = \frac{د^{2}م^{6} - ٣د^{2}م^{2}}{د^{2}م^{4} - ٣د^{2}}$$

$$= \frac{د^{2}م^{2}(م^{4} - ٣)}{د^{2}(م^{4} - ٣)} = م^{2}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{ب}{د} = \frac{د م^{2}}{د} = م^{2}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $$\frac{أب - جـد}{ب^{2} - جـ^{2}} = \frac{أ + جـ}{ب}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$$

جـ = د م ، ب = د م² ، أ = د م³

$$\text{الأيمن} = \frac{أب - جـد}{ب^{2} - جـ^{2}} = \frac{د م^{3} \times د م^{2} - د م \times د}{د^{2}م^{4} - د^{2}م^{2}}$$

$$= \frac{د^{2}م^{5} - د^{2}م}{د^{2}م^{4} - د^{2}م^{2}} = \frac{د^{2}م(م^{4} - ١)}{د^{2}م^{2}(م^{2} - ١)}$$

$$= \frac{د^{2}م(م^{2} - ١)(م^{2} + ١)}{د^{2}م^{2}(م^{2} - ١)} = \frac{م^{2} + ١}{م}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{أ + جـ}{ب} = \frac{د م^{3} + د م}{د م^{2}} = \frac{د م(م^{2} + ١)}{د م^{2}}$$

$$= \frac{م^{2} + ١}{م}$$ ∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن: $$\frac{أ - ب}{أ - جـ} = \frac{ب}{ب + جـ}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$$

ب = جـ م ، أ = جـ م²

$$\text{الأيمن} = \frac{أ - ب}{أ - جـ} = \frac{جـ م^{2} - جـ م}{جـ م^{2} - جـ} = \frac{جـ م(م - ١)}{جـ(م^{2} - ١)}$$

$$= \frac{جـ م(م - ١)}{جـ(م - ١)(م + ١)} = \frac{م}{م + ١}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{ب}{ب + جـ} = \frac{جـ م}{جـ م + جـ} = \frac{جـ م}{جـ(م+١)}$$

$$= \frac{م}{١+م}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦

إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع

فاثبت أن: $$\frac{س ع}{ص^{2} + ص ع} = \frac{س}{س + ص}$$

الحل

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$$

ص = ع م ، س = ع م²

$$\text{الأيمن} = \frac{س ع}{ص^{2} + ص ع} = \frac{ع م^{2} \times ع}{ع^{2}م^{2} + ع م \times ع}$$

$$= \frac{ع^{2}م^{2}}{ع^{2}م^{2} + ع^{2}م} = \frac{ع^{2}م^{2}}{ع^{2}م(م + ١)} = \frac{م}{م + ١}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{س}{س + ص} = \frac{ع م^{2}}{ع م^{2} + ع م} = \frac{ع م^{2}}{ع م(م + ١)}$$

$$= \frac{م}{١+م}$$ ∴ الأيمن = الأيسر

٤ التغير الطردي

♣ إذا كانت ص تتغير طرديا مع س فإنها تكتب: ص ∝ س ومنها يكون:

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت	لإيجاد قيمة
ص = م س	م = $\frac{ص}{س}$	$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

◆ العلاقة الطردية يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

♣ إذا كانت ص ∝ $س^2$ فإن الثابت م = $\frac{ص}{س^2}$ والعلاقة هى ص = م $س^2$

◆ لإثبات أن ص ∝ س نثبت أن ص = (ثابت) س

مثال ١ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فأوجد : ١) العلاقة بين س ، ص
٢) قيمة ص عندما س = ٥

الحل

ص ∝ س ∴ ص = م س

م = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

العلاقة هى: ص = ٢ س

بالتعويض عن س = ٥

∴ ص = ٢ × ٥ = ١٠

مثال ٢ إذا كانت ص تتغير طرديا بتغير س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢

أوجد : ١) العلاقة بين س ، ص
٢) قيمة س عندما ص = ٢٠

الحل

ص ∝ س ∴ ص = م س

م = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١٤}{٤٢}$ = $\frac{١}{٣}$

العلاقة هى: ص = $\frac{١}{٣}$ س

٢٠ = $\frac{١}{٣}$ س

∴ س = ٢٠ × ٣ = ٦٠

مثال ٣ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلومترا في ٦ ساعات، فكم كيلومترًا تقطعها السيارة في ١٠ ساعات

الحل

نرمز للمسافة بالرمز ف والزمن بالرمز ز

$ف_1$ = ١٥٠ ، $ز_1$ = ٦

$ف_2$ = ؟؟ ، $ز_2$ = ١٠

ف ∝ ز ∴ $\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ز_1}{ز_2}$

$\frac{١٥٠}{ف_2} = \frac{٦}{١٠}$

∴ $ف_2$ = $\frac{١٥٠ \times ١٠}{٦}$ = ٢٥٠ كيلومتر

مثال ٤ إذا كان: $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فاثبت أن: ص ∝ ع

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٢١س ع – ص ع = ٧س ص – ص ع

٢١ س ع = ٧ س ص

٢١ ع = ٧ ص

ص = $\frac{٢١}{٧}$ ع

∴ ص ∝ ع

التغير العكسى

♣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س فإنها تكتب: ص $\propto \frac{١}{س}$ ومنها يكون:

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت	لإيجاد قيمة
ص س = م	م = ص × س	$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

◆ يمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة ص س = م أو ص = $\frac{م}{س}$

◆ لإثبات أن ص $\propto \frac{١}{س}$ نثبت أن ص س = ثابت

مثال ١

إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

أوجد : ١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة ص عندما س = ١,٥

الحل

ص $\propto \frac{١}{س}$ ∴ ص س = م

م = ص × س = ٣ × ٢ = ٦

العلاقة هى : ص س = ٦

$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$ $\frac{٣}{ص} = \frac{١,٥}{٢}$

ص × ١,٥ = ٦ ∴ ص = ٤

مثال ٢

من بيانات الجدول التالى أجب:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

١) بين نوع التغير بين ص ، س

٢) أوجد ثابت التناسب

٣) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

الحل

١ نوع التغير عكسى (لأنه كلما زادت س نقصت ص)

٢ ثابت التناسب = ص × س = ٦ × ٢ = ١٢

٣ بالتعويض عن س = ٣ في العلاقة ص س = ١٢

ص × ٣ = ١٢ ∴ ص = ٤

مثال ٣

إذا كان : $س^٤ص^٢ - ١٤س^٢ص + ٤٩ = ٠$

فاثبت أن: ص $\propto \frac{١}{س^٢}$

الحل

بتحليل المقدار المربع الكامل

$(س^٢ص - ٧)^٢ = ٠$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$س^٢ص - ٧ = ٠$

$س^٢ص = ٧$

∴ ص $\propto \frac{١}{س^٢}$

مثال ٤

إذا كان: ص= أ-٩، ص $\propto \frac{١}{س^٢}$ وكان أ=١٨ عندما س= $\frac{٢}{٣}$

فأوجد العلاقة بين س،ص ثم استنتج قيمة ص عندما س=١

الحل

ص $\propto \frac{١}{س^٢}$ ∴ $ص س^٢ = م$

بالتعويض عن ص = أ-٩

$(أ-٩) س^٢ = م$ $(١٨-٩) \times (\frac{٢}{٣})^٢ = م$

∴ م = ٩ × $\frac{٤}{٩}$ = ٤

∴ العلاقة هى $ص س^٢ = ٤$

عندما س = ١ $ص \times ١^٢ = ٤$ ص = ٤

أسئلة اختر على الوحدة الثانية

١ إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

(أ) ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٧ (د) ٤ : ٧

٢ إذا كان ٥ أ ـ ٢ ب = ٠ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

٣ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{٥أ}{٣ب}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٩}$ (د) ١

٤ الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٦ ، ٨ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

٥ إذا كانت أ ، ٤ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) $\frac{-٩}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٩}$

٦ إذا كان: أ ، ٢س ، ب ، ٣س كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

(أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٣ : ٢

٧ إذا كان $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٤} = \frac{أ + ب}{ك}$ فإن ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١

٨ الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ يساوى ....

(أ) ٩ (ب) -٩ (جـ) ± ٩ (د) ١٥

٩ الثالث المتناسب للعددين ٥ ، ٨٠ يساوى ....

(أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٤٠ (د) ٢٠

٩ إذا كان ٣ س ص = ٨ فإن ....

(أ) س $\propto$ ص (ب) ص $\propto$ س (جـ) ٣س $\propto$ ٨ص (د) س $\propto \frac{١}{ص}$

١٠ إذا كان ص $\propto$ س وكان ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ٣ عندما س = ...

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٦

١١ العلاقة التى تمثل تغيرا طردياً بين المتغيرين س ، ص هى ....

(أ) س ص = ٥ (ب) ص= س +٣ (جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

١٢ إذا كان س ص = ٧ فإن ص $\propto$ ....

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) س − ٧ (جـ) س (د) س + ٧

١٣ إذا كانت ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ فى تناسب متسلسل ، فإن $س^{٢}ص$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٩

تعليم
محمود عوض
معلم أول رياضيات

إعداد أ/ محمود عوض

واجب على الوحدة الثانية

النسبة والتناسب

(١) أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

(٢) عددان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا طرح من كل منهما ٦ أصبحت النسبة بينهما ٢ : ٣ أوجد العددين

(٣) أوجد الثالث المتناسب للكميات ٨ ، ٩ ، ٢٧

(٤) أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ أصبحت أعدادا متناسبة

(٥) إذا كانت ٣ أ = ٢ ب فأوجد قيمة $\frac{٣أ - ب}{٢أ + ب}$

(٦) إذا كانت $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فأوجد قيمة المقدار: $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع}$

(٧) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{٣أ - ٦جـ}{ب - ٢د} = \frac{٣ أ}{ب}$

(٨) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{أ^٢ - جـ^٢}{ب^٢ - د^٢} = \frac{أ جـ}{ب د}$

(٩) إذا كان $\frac{أ}{٤س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ص}$

فاثبت أن: $\frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = \frac{أ - ب}{٣س + ٥ص}$

(١٠) إذا كان $\frac{أ^٢ - ٢جـ^٢}{ب^٢ - ٢د^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$

فاثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

التناسب المتسلسل

(١) إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{جـ^٢ + أ}{ب} = \frac{د^٢ + جـ}{د}$

(٢) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{أ}{ب + د} = \frac{جـ^٣}{جـ^٢ د + د^٣}$

(٣) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن $\frac{٢ جـ^٢ - ٣ ب^٢}{٢ ب^٢ - ٣ أ^٢} = \frac{جـ^٢}{ب^٢}$

(٤) أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ١،٥،١٧ فإنها تكون تناسبا متسلسلا

التغير الطردى والعكسى

(١) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢٠ عندما س= ٧ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤

(٢) إذا كانت أ ∝ ب وكانت أ = ١٠ عندما ب = ٥

فأوجد: ١) العلاقة بين أ ، ب

٢) قيمة ب عندما أ = ٤

(٣) إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد: ١) العلاقة بين ص ، س

٢) قيمة س عندما ص = ١٦

(٤) إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٢١ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ٧

(٥) إذا كانت $\frac{أ + ٢ب}{٦} = \frac{ب + ٣جـ}{٣}$ فاثبت أن أ ∝ جـ

اختبار على الوحدة الثانية

إعداد أ/ محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان ١ ، س ، ٤ في تناسب متسلسل فإن س = ...

(أ) ±١ (ب) ±٢ (جـ) ±٤ (د) ±٣

٢ إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن $\frac{ب - أ}{ب + أ} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٥}$

٣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt{٧}$ عندما ص = $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ فإن ثابت التناسب = ...

(أ) ٥ (ب) ٣٥ (جـ) $\frac{٥}{٧}$ (د) $\frac{١}{٥}$

٤ إذا كانت أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن $\frac{ب}{أ} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٢

السؤال الثاني:

أ) إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س وكانت ص = ٢ عندما س = ٦
فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣

ب) إذا كانت ٥ أ = ٣ ب فأوجد قيمة $\frac{٧أ + ٩ب}{٤أ + ٢ب}$

السؤال الثالث:

أ) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فاثبت أن : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢ + جـ^٢}{جـ^٢}$

ب) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٣ عندما س = ٤ فأوجد:
١) العلاقة بين ص ، س ٢) قيمة ص عندما س = ٨

السؤال الرابع:

أ) أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٥ ، ١٨

ب) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت أن $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{أ - ٢جـ}{ب - ٢د}$

انتهت الأسئلة

إعداد أ/ محمود عوض

التشتت

- التشتت هو التباعد أو الاختلاف
- من مقاييس التشتت: المدى ، الانحراف المعيارى

١ المدى

- هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها. وهو الفرق بين أكبر القيم وأصغرها.

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

- مثال: المدى للقيم ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ، ١٧ هو ٢٣ – ١٥ = ٨

٢ الانحراف المعيارى σ

- هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى
- الانحراف المعيارى هو أكثر مقاييس التشتت انتشارا وأدقها.
- اذا تساوت جميع المفردات فإن : الانحراف σ = صفر والمدى = صفر

حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من القيم

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2}{ن}}$$

حيث: $\overline{س}$ الوسط الحسابى ، ن عدد القيم

$$\text{لحساب الوسط } \overline{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

ملاحظات للحل

- نكون جدول مكون من ٣ أعمدة
- العمود الأول س : نكتب فيه القيم التى في المسألة
- نحسب الوسط $\overline{س}$ قبل أن نملأ الجدول

حساب الانحراف المعيارى للجدول التكرارى

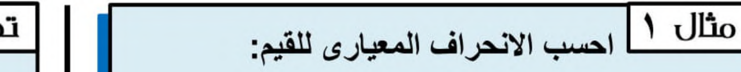
$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 ك}{\text{مجـ ك}}}$$

حيث: $\overline{س}$ الوسط الحسابى ، ك التكرار

$$\text{لحساب الوسط } \overline{س} = \frac{\text{مجـ }(س \times ك)}{\text{مجـ ك}}$$

ملاحظات للحل

- نكون جدول من ٦ أعمدة
- العمود الأول س نكتب فيه أرقام الصف الأول من المسألة
- العمود الثانى ك نكتب فيه أرقام الصف الثانى من المسألة
- نملأ أول ثلاثة أعمدة ثم نحسب الوسط $\overline{س}$ ثم نكمل الجدول



مثال ١ احسب الانحراف المعيارى للقيم:

١٦ ، ٣٢ ، ٥، ٢٠ ، ٢٧

الحل

الوسط $\bar{س}$ = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

$= \frac{١٦+٣٢+٥+٢٠+٢٧}{٥} = \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠$

س	س - $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)²
١٦	١٦-٢٠ = -٤	١٦
٣٢	٣٢-٢٠ = ١٢	١٤٤
٥	٥-٢٠ = -١٥	٢٢٥
٢٠	٢٠-٢٠ = ٠	٠
٢٧	٢٧-٢٠ = ٧	٤٩
مجـ	xxx	٤٣٤

$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ (س- }\bar{س}\text{)}^٢}{ن}} = \sqrt{\frac{٤٣٤}{٥}} = ٩,٣$

مثال ٢ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦	١٠٠

الحل

س	ك	س×ك	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)²	(س − $\bar{س}$)² ك
٠	٨	صفر	٠-٢ = -٢	٤	٤×٨ =٣٢
١	١٦	١٦	١-٢ = -١	١	١×١٦=١٦
٢	٥٠	١٠٠	٢-٢ = ٠	٠	٠×٥٠=٠
٣	٢٠	٦٠	٣-٢ = ١	١	١×٢٠=٢٠
٤	٦	٢٤	٤-٢ = ٢	٤	٤×٦=٢٤
مجـ	١٠٠	٢٠٠	xx	xx	٩٢

الوسط $\bar{س}$ = $\frac{\text{مجـ (س×ك)}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$

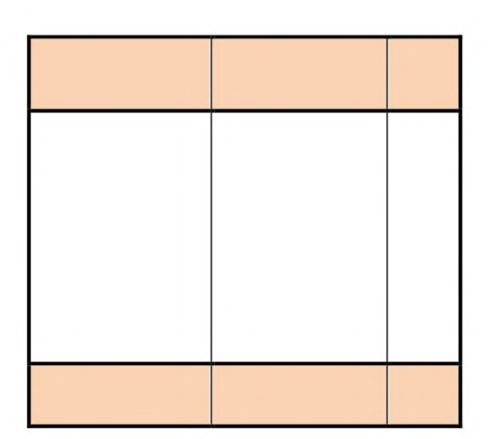
الانحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ (س- }\bar{س}\text{)}^٢ \text{ ك}}{\text{مجـ ك}}}$

$= \sqrt{\frac{٩٢}{١٠٠}} = ١$ طفل

تدريب احسب الانحراف المعيارى للقيم:

٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل



تدريب احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

الحل

س	ك	س×ك	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)²	(س − $\bar{س}$)² ك
مجـ			xx	xx	

حساب الانحراف المعيارى للجدول التكرارى ذي المجموعات

يحل بنفس قوانين وطريقة حل الانحراف المعيارى للجدول التكرارى البسيط مع اختلاف واحد فقط وهو :

◆ العمود الأول س نكتب فيه مركز المجموعة ويحسب كالتالى :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$$

مثال ٣ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعة	-٠	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

الحل

نحسب مراكز المجموعات لنكتبها في عمود س

$م_١ = \frac{٠ + ٤}{٢} = ٢$ ، $م_٢ = \frac{٤ + ٨}{٢} = ٦$ ، $م_٣ = \frac{٨ + ١٢}{٢} = ١٠$

$م_٤ = \frac{١٢ + ١٦}{٢} = ١٤$ ، $م_٥ = \frac{١٦ + ٢٠}{٢} = ١٨$

س	ك	س×ك	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^٢	(س − $\bar{س}$)^٢ ك
٢	٣	٦	-٩,٦	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٦	٤	٢٤	-٥,٦	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
١٠	٧	٧٠	-١,٦	٢,٥٦	١٧,٩٦
١٤	٢	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٨	٩	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مجـ	٢٥	٢٩٠	xx	xx	٨٠٠

$$\text{الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجـ}(س×ك)}{\text{مجـ ك}} = \frac{٢٩٠}{٢٥} = ١١,٦$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س-\bar{س})^٢ ك}{\text{مجـ ك}}}$$

$$= \sqrt{\frac{٨٠٠}{٢٥}} = ٥,٧$$

تدريب احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

عدد الكيلومترات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد السيارات	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

الحل

أسئلة اختر على الإحصاء

١ الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....

(أ) المدى　(ب) الوسط الحسابى　(جـ) الإنحراف المعيارى　(د) المنوال

٢ المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى ....

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) ٦　(د) ١٢

٣ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ....

(أ) المنوال　(ب) الوسيط　(جـ) الوسط　(د) المدى

٤ أسهل وأبسط مقاييس التشتت هو ....

(أ) المنوال　(ب) الوسيط　(جـ) المدى　(د) الانحراف المعيارى

٥ إذا كانت ١٨ هى أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى = ٦ فإن أصغر مفردات المجموعة = ...

(أ) ٨　(ب) ١٢　(جـ) ٢٤　(د) ٣٦

واجب على الإحصاء

١ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للقيم ٨ ، ١٠ ، ١٢، ١٤ ، ١٦

٢ فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفةالتى وجدت في ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة

٣ التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٥٠ طالب في مادة الرياضيات

عدد الوحدات التالفة	١٠ـ	٢٠ـ	٣٠ـ	٤٠ـ	٥٠ـ	المجموع
عدد الصناديق	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع

تراكمى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) [١ ، ٣] − { ٠ ، ١ } = ...

أ)] ١ ، ٣] ب)] ١ ، ٣ [ج) [١ ، ٣] د) { ٣ }

٢) مجموعة حل المعادلة $(س - ١)^{٢} = ٩$ في ح هى ....

أ) { ٤ } ب) { -٢ } ج) { ٤ ، -٢ } د) { ٣ }

٣) إذا كانت $٢^{س} = ٤^{٣}$ فإن س = ...

أ) ٣ ب) ٤ ج) ٦ د) ٦٤

٤) إذا كانت $\frac{٣}{٤} + \frac{٣}{س} = \frac{٣}{٢}$ فإن س = ...

أ) ٢ ب) ٤ ج) ٣ د) $\frac{٣}{٢}$

٥) ٢٠٪ من ١٠ جنيهات = ... جنيه

أ) ٢ ب) ٢,٥ ج) ٥ د) ٢٠

٦) إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو .... = ...

أ) ٣ + س ب) ٣ س ج) ٣ − س د) $\frac{٣}{س}$

٧) $(\sqrt{٥} + ٢)(\sqrt{٥} - ٢) =$ ....

أ) ٥ ب) ٣ ج) ٢ د) ١

٨) إذا كان $أ^{٢} - ب^{٢} = ١٢$ ، أ + ب = ٣ فإن أ − ب = ...

أ) ٨ ب) ٤ ج) ١٥ د) ٣٦

٩) [١ ، ٥ [∪ { ١ ، ٥ } = ...

أ)] ١ ، ٥] ب) [١ ، ٥ [ج)] ١ ، ٥ [د) [١ ، ٥]

١٠) ح = ...

أ) $ح_+ ∩ ح_-$ ب) ن ∩ ن ج) $ح_+ ∪ ح_-$ د) ن ∪ ن

١١) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو ....

أ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ب) $٦\sqrt{٣}$ ج) $٢\sqrt{٣}$ د) $-٢\sqrt{٣}$

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات